Geometric Random Sum of Probability Distribution for Summands May Vary Together with Paramater of Geomertric Distribution

Hau Tran Ngoc

May 12, 2023

TỔNG NGẪU NHIÊN HÌNH HỌC VỚI SỐ HẠNG CÓ PHÂN PHỐI XÁC SUẤT PHỤ THUỘC THAM SỐ BIẾN HÌNH HỌC

GEOMETRIC RANDOM SUM OF PROBABILITY DISTRIBUTION FOR SUMMANDS MAY VARY TOGETHER WITH PARAMATER OF GEOMERTRIC DISTRIBUTION

Trần Ngọc Hậu

Bộ môn Toán, khoa Cơ Bản

Trường Đại học Giao Thông Vận Tải Tp Hồ Chí Minh

Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

hau_cb@hcmutrans.edu.vn

Tóm tắt. **Bài báo tiếp cận định lý giới hạn liên quan đến tổng hình học bằng phương pháp toán tử. Sử dụng khoảng cách xác suất Trotter được xây dựng trên toán tử Trotter để đánh giá tốc độ hội tụ cho định lý giới hạn dạng định lý Rényi của Kalashnikov [4].**

Từ khóa. Tổng ngẫu nhiên, tổng hình học, toán tử Trotter, khoảng cách xác suất.

Abstract. **This article approaches some results of limit theorems concerning the geometric sums by the operator method. Using the Trotter probability distance base on Trotter operator to give the rates of convergence in the general form of Rényi theorem which was given by Kalashnikov [4].**

Keyword. Random summation, geometric sum, Trotter operator, probability distance measure.

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Gọi $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập, tổng hình học được xác định

$$S_N = X_1 + X_2 + ... + X_N,$$

trong đó N là biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối hình học với tham số $q \in (0,1)$ kí hiệu là $N \sim Geo(q)$ độc lập với tất cả các $X_n,\ \ n \geq 1$ có hàm mật độ

$$f(k) = P(N = k) = q(1-q)^{k-1},\ \ k = 1,2,...$$

Tổng hình học có nhiều ứng dụng thực tế như ứng dụng trong lý thuyết xếp hàng, lý thuyết rủi ro, độ tin cậy,…(xem [1], [4]). Từ các ứng dụng đặt ra vấn đề là xác định phân phối xác suất hay tìm một xấp xỉ cho phân phối xác suất của tổng hình học. Một số kết quả điển hình về mặt lý thuyết liên quan đến tổng hình học có thể nói đến là định lý Rényi được phát biểu năm 1976 như sau

Định lý 1. *Giả sử $\{X_n,\ n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị không âm, độc lập, cùng phân phối và kỳ vọng hữu hạn $E(X_1) = m < +\infty$. Gọi $N \sim Geo(q)$ và độc lập với tất cả các $X_i, i \geq 1$. Khi đó,*

$$\lim_{q \to 0^+} F_{qS_N}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{m}}, \tag{1.1}$$

với $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ *và* $F_{qS_N}(x) = P(qS_N \leq x)$.

Từ (1.1) ta có xấp xỉ mũ cho phân phối xác suất của tổng hình học $F_{S_N}\left(x\right) \simeq 1 - e^{-q\frac{x}{m}}$. Kalashnikov 1997a [5] đã chỉ ra rằng khi các biến ngẫu nhiên $X_n,\ n \geq 1$ có cùng hàm phân phối $F_{X_q}\left(x\right)$ thay đổi theo tham số q sẽ cho xấp xỉ mũ tốt hơn khi hàm phân phối của nó là cố định. Từ nhận xét đó, các kết quả của Kalashnikov trình theo dạng định lý Rényi tổng quát khi mà hàm phân phối của các biến ngẫu nhiên thành phần thay đổi theo tham số q. Trong các kết quả được đưa ra, Kalashnikov chủ yếu tiếp cận theo hướng sử dụng lý thuyết của quá trình phục hồi.

Bài báo này sẽ trình bày chứng minh định lý Rényi theo phương pháp toán tử Trotter và sử dụng khoảng cách xác suất Trotter để đánh giá tốc độ hội tụ của một số định lý liên quan định lý Rényi.

II. TOÁN TỬ TROTTER VÀ KHOẢNG CÁCH XÁC SUẤT TROTTER

Toán tử Trotter được Trotter H. F. xây dựng đầu tiên năm 1959 (xem [5]).

Định nghĩa 1. *Với mỗi $f \in C_B\left(\mathbb{R}\right)$ là hàm liên tục đều và bị chặn trên $\mathbb{R}$. Toán tử Trotter liên kết với biến ngẫu nhiên X kí hiệu T_X,*

$$\begin{aligned} T_X:\ & C_B\left(\mathbb{R}\right) \to C_B\left(\mathbb{R}\right) \\ & f \mapsto T_X f\left(y\right) = E\left\{f\left(X+y\right)\right\} \\ & \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\,dF_X\left(x\right). \end{aligned}$$

Một số tính chất quan trọng được trình bày trong [2], [3], [4]

1. Nếu X_1 và X_2 là hai biến ngẫu nhiên cùng phân phối thì $T_{X_1}f \equiv T_{X_2}f$.

2. Gọi $\left\{X_n,\ n \geq 1\right\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên, khi đó với mỗi $f \in C_B\left(\mathbb{R}\right)$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|T_{X_n}f - T_X f\right\| = 0$ thì $X_n \xrightarrow{d} X$, với chuẩn được xác định $\left\|T_X f\right\| = \sup\limits_{y}\left|T_X f\left(y\right)\right|$.

3. Giả sử $\left\{X_n,\ n \geq 1\right\}$ và $\left\{Y_n,\ n \geq 1\right\}$ là hai dãy biến ngẫu nhiên độc lập theo mỗi nhóm. Gọi N là biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương độc lập với tất cả các biến ngẫu nhiên $X_n,\ Y_n\quad n \geq 1$. Khi đó ta có

i. $\left\|T_{\sum_{k=1}^{n} X_k} f - T_{\sum_{k=1}^{n} Y_k} f\right\| \leq \sum\limits_{k=1}^{n}\left\|T_{X_k} f - T_{Y_k} f\right\|$

ii. $\left\|T_{\sum_{k=1}^{N} X_k} f - T_{\sum_{k=1}^{N} Y_k} f\right\|$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(N = k\right)\sum_{i=1}^{k}\left\|T_{X_i} f - T_{Y_i} f\right\|.$$

Nếu $\left\{X_n,\ n \geq 1\right\}$ và $\left\{Y_n,\ n \geq 1\right\}$ là hai dãy biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối theo mỗi nhóm thì ta có

i. $\left\|T_{\sum_{k=1}^{n} X_k} f - T_{\sum_{k=1}^{n} Y_k} f\right\| \leq n\left\|T_{X_1} f - T_{Y_1} f\right\|$,

ii. $\left\|T_{\sum_{k=1}^{N} X_k} f - T_{\sum_{k=1}^{N} Y_k} f\right\| \leq E\left(N\right)\left\|T_{X_1} f - T_{Y_1} f\right\|$.

Từ định nghĩa và tính chất của toán tử Trotter có thể xây dựng khoảng cách xác suất Trotter (xem [2]) như sau.

Định nghĩa 2. *Khoảng cách Trotter được ,,xác định qua ánh xạ*

$$\begin{aligned} d_T:\ & \mathbb{S}\times\mathbb{S} \to [0,+\infty) \\ & \left(X,Y\right) \mapsto d_T\left(X,Y;f\right) \\ & d_T\left(X,Y;f\right) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|E\left[f\left(X+t\right)\right] - E\left[f\left(Y+t\right)\right]\right| \\ & \qquad = \left\|T_X f - T_Y f\right\|, \end{aligned}$$

với $f \in C_B\left(\mathbb{R}\right)$ và $\mathbb{S}$ là tập biến ngẫu nhiên trong không gian xác suất $\left(\Omega, \mathrm{F}, P\right)$. Các tính chất sau được suy ra từ tính chất của toán tử Trotter (xem [1], [2]):

1. Khoảng các Trotter là một khoảng cách xác suất.

2. Nếu $d_T\left(X,Y;f\right) = 0$ với mọi $f \in C_B\left(\mathbb{R}\right)$ thì $F_X \equiv F_Y$.

3. Gọi $\left\{X_n,\ n \geq 1\right\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên, khi đó với mỗi $f \in C_B\left(\mathbb{R}\right)$ nếu $d_T\left(X_n, X; f\right) \longrightarrow 0\quad \left(n \to +\infty\right)$ thì $X_n \xrightarrow{d} X$.

4. Giả sử $\left\{X_n,\ n \geq 1\right\}$ và $\left\{Y_n,\ n \geq 1\right\}$ là hai dãy biến ngẫu nhiên độc lập theo mỗi nhóm. Gọi N là biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương độc lập với tất cả các biến ngẫu nhiên $X_n,\ Y_n\quad n \geq 1$. Khi đó với mọi $f \in C_B\left(\mathbb{R}\right)$ ta có

i. $d_T\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k, \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k; f\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} d_T\left(X_k, Y_k; f\right)$,

ii. $d_T\left(\sum\limits_{k=1}^{N} X_k, \sum\limits_{k=1}^{N} Y_k; f\right)$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} P\left(N = i\right)\sum_{k=1}^{i} d_T\left(X_k, Y_k; f\right).$$

Xét riêng $\{X_n,\ n\ge 1\}$ *và* $\{Y_n,\ n\ge 1\}$ *là hai dãy biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối theo mỗi nhóm thì ta có*

i. $d_T\left(\sum_{k=1}^{n}X_k,\sum_{k=1}^{n}Y_k;f\right)\le nd_T\left(X_1,Y_1;f\right)$,

ii. $d_T\left(\sum_{k=1}^{N}X_k,\sum_{k=1}^{N}Y_k;f\right)\le E\left(N\right)d_T\left(X_1,Y_1;f\right)$.

Ta nhắc lại định nghĩa về môđun liên tục của hàm f và lớp hàm Lipschitz.

Định nghĩa 3. *Cho* $f\in C_B(\mathbb{R})$, *với* $\delta\ge 0$ *hàm* $\omega(f;\delta)$ *được xác định*

$$\omega(f;\delta)=\sup_{|h|\le\delta}\left\|f(x+h)-f(x)\right\|$$

được gọi là môđun liên tục của hàm f.

Ta cũng có tính chất sau (xem chi tiết trong các tài liệu [2], [3], [4])

1. *Hàm* $\omega(f;\delta)$ *là đơn điệu tăng theo* δ *và* $\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)=0$.

2. *Với mọi* $\lambda\ge 0$ *ta đều có* $\omega(f;\lambda\delta)\le(1+\lambda)\omega(f;\delta)$.

Định nghĩa 4. *Hàm số* $f\in C_B(\mathbb{R})$ *được gọi là thỏa mãn điều kiện Lipschitz bậc* α *với* $0<\alpha\le 1$ *nếu tồn tại hằng số dương* M *sao cho* $\omega(f;\delta)\le M\delta^{\alpha}$. *Hằng số dương* M *nhỏ nhất gọi là hằng số Lipschitz và kí hiệu lớp hàm Lipschitz với hằng số* M *là* $Lip(\alpha,M)$

$$Lip(\alpha,M)=\left\{f\,\middle|\,f\in C_B(\mathbb{R}),\ \omega(f;\delta)\le M\delta^{\alpha}\right\}.$$

III. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH VÀ THẢO LUẬN

Ta kí hiệu lớp hàm thực khả vi cấp r liên tục đều bị chặn như sau:

$$C_B^r(\mathbb{R})=\left\{f\in C_B(\mathbb{R})\,\middle|\,f^{(i)}\in C_B(\mathbb{R}),\ i=1,2,...,r\right\}.$$

Bổ đề 1. *Giả sử* $\{X_n,\ n\ge 1\}$ *là dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối mũ với tham số* $p>0$, *kí hiệu* $X\sim \mathrm{Exp}(p)$ *có hàm mật độ xác suất*

$$f_X(x)=\begin{cases}pe^{-px} & ,x\ge 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$

và $N\sim Geo(q)$ *độc lập với tất cả* $X_n,\ n\ge 1$. *Khi đó ta có* $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i\sim \mathrm{Exp}(pq)$.

Chứng minh. Các biến ngẫu nhiên $X_i\sim\mathrm{Exp}(p)$, $i=\overline{1,n}$ nên ta có $\sum_{i=1}^{k}X_i\sim G(p,k)$, với $G(p,k)$ là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối Gamma với hai tham số p,k có hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{p^kx^{k-1}e^{-px}}{\Gamma(k)} & ,\ x>0\\ 0 & ,\ x\le 0\end{cases}.$$

Trong đó, hàm Gamma được xác định

$$\Gamma(k)=\int_0^{+\infty}x^{k-1}e^{-x}dx.$$

Nếu k là số nguyên dương và $k>1$, bằng tích phân từng phần ta được

$$\begin{aligned}\Gamma(k)&=\int_0^{+\infty}x^{k-1}e^{-x}dx\\ &=(k-1)\int_0^{+\infty}x^{k-2}e^{-x}dx=(k-1)\Gamma(k-1).\end{aligned}$$

Tương tự ta có $\Gamma(k)=(k-1)!$.

$$\begin{aligned}P\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\le x\right)&=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\le x,N=k\right)\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}P(N=k)P\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\le x\right)\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}q(1-q)^{k-1}\int_0^x\frac{p^ky^{k-1}e^{-py}}{\Gamma(k)}dy\\ &=\int_0^x\sum_{k=1}^{\infty}q(1-q)^{k-1}\frac{p^ky^{k-1}e^{-py}}{(k-1)!}\\ &=\int_0^x pqe^{-py}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[(1-q)py\right]^{k-1}}{(k-1)!}\\ &=\int_0^x pqe^{-py}e^{(1-q)py}=1-e^{-pqx}\end{aligned}$$

Vậy tổng S_N *tuân theo luật phân phối mũ với tham số* pq. □

Định lý 2. *Gọi* $\{X_i,i\ge 1\}$ *là dãy biến ngẫu nhiên không âm độc lập với nhau và độc lập với* $N\sim Geo(q)$ *cùng phân phối xác suất với biến ngẫu nhiên* X *có hàm phân phối* F_X *phụ thuộc* q *với* $E(X)=m_q<+\infty$ *và* $\lim_{q\to 0}(m_q)=\lambda$. *Khi đó,*

$$\lim_{q\to 0^+}P\left(\frac{S_N}{E(N)}\le x\right)=1-e^{-\lambda^{-1}x}$$

với $S_N=X_1+X_2+...+X_N$.

Chứng minh. Gọi Z là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ $Z \sim \text{Exp}(\lambda^{-1})$. Khi đó $Z \overset{d}{=} S^*$, $S^* = q.\sum_{j=1}^{N} Z_j$ với $\{Z_j\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập nhau, độc lập với N và có phân phối mũ $Z_j \sim \text{Exp}(\lambda^{-1})$.

Với $f \in C_B^1(\mathbb{R})$, do hai dãy biến ngẫu nhiên $\{X_j, j \geq 1\}$ và $\{Z_j, j \geq 1\}$ độc lập nhau nên

$$d\left(\frac{S_N}{N}, q.S_N^*; f\right) \leq q^{-1}.d\left(qX_1, qZ_1; f\right).$$

Toán tử Trotter liên kết với biến qX_1,

$$\begin{aligned}T_{qX_1} f\left(y\right) &= E\left[f(qX_1 + y)\right] = \int_0^{+\infty} f(qx + y) dF_{X_1}(x) \\ &= f\left(y\right) + qm_q f'\left(y\right) + q\int_0^{+\infty} x\left[f'\left(\xi\right) - f'\left(y\right)\right] dF_{X_1}\left(x\right),\end{aligned}$$

trong đó $\left|\xi - y\right| < qx$.

Tương tự với qZ_1

$$\begin{aligned}&T_{qZ_1} f\left(y\right) \\ &= f\left(y\right) + q\lambda f'\left(y\right) + q\int_0^{+\infty} x\left[f'\left(\eta\right) - f'\left(y\right)\right] dF_{Z_1}\left(x\right),\end{aligned}$$

với $\left|\eta - y\right| < qx$.

Do $f' \in C_B^1(\mathbb{R})$ nên $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho nếu $\left|x - y\right| < \delta$ thì $\left|f'(x) - f'(y)\right| < \varepsilon$. Từ đó ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned}&\left|T_{qX_1} f(y) - T_{qZ_1} f(y)\right| \leq q\left|f'(y)\left(m_q - \lambda\right)\right| \\ &+\left|q\int_0^{+\infty} x\left[f'(\xi) - f'(y)\right] dF_{X_1}(x) - q\int_0^{+\infty} x\left[f'(\eta) - f'(y)\right] dF_{Z_1}(x)\right| \\ &\leq q\left|f'(y)\left(m_q - \lambda\right)\right| \\ &+q\int_0^{q^{-1}\delta} x\left|f'(\xi) - f'(y)\right| dF_{X_1}(x) + q\int_{q^{-1}\delta}^{+\infty} x\left|f'(\xi) - f'(y)\right| dF_{X_1}(x) \\ &+ q\int_0^{q^{-1}\delta} x\left|f'(\eta) - f'(y)\right| dF_{Z_1}(x) + q\int_{q^{-1}\delta}^{+\infty} x\left|f'(\eta) - f'(y)\right| dF_{Z_1}(x) \\ &\leq q\left|f'(y)\left(m_q - \lambda\right)\right| \\ &+q\varepsilon\int_0^{q^{-1}\delta} x dF_{X_1}(x) + q\int_{q^{-1}\delta}^{+\infty} x\left|f'(\xi) - f'(y)\right| dF_{X_1}(x) \\ &+ q\varepsilon\int_0^{q^{-1}\delta} x dF_{Z_1}(x) + q\int_{q^{-1}\delta}^{+\infty} x\left|f'(\eta) - f'(y)\right| dF_{Z_1}(x) \\ &\leq q\left|f'(y)\left(m_q - \lambda\right)\right| \\ &+q\varepsilon(m_q + \lambda) + 2q\left\|f'\right\|\left(\int_{q^{-1}\delta}^{+\infty} x dF_{X_1}(x) + \int_{q^{-1}\delta}^{+\infty} x dF_{Z_1}(x)\right)\end{aligned}$$

Từ đây ta có đánh giá

$$\begin{aligned}&d\left(\frac{S_N}{N}, q.S_N^*; f\right) \leq \left|f'(y)\left(m_q - \lambda\right)\right| \\ &+ \varepsilon(m_q + \lambda) + 2\left\|f'\right\|\left(\int_{q^{-1}\delta}^{+\infty} x dF_{X_1}(x) + \int_{q^{-1}\delta}^{+\infty} x dF_{Z_1}(x)\right).\end{aligned}$$

Điều này đúng với mọi ε dương bé tùy ý nên $\lim_{q \to 0^+} d\left(\frac{S_N}{N}, q.S_N^*; f\right) = 0$. Từ đây ta có $\frac{S_N}{N} \xrightarrow{d} Z$. □

Định lý 3. *Giả sử $\{X_i, i \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị không âm độc lập với nhau, độc lập với $N \sim Geo\left(q\right)$, cùng phân phối phụ thuộc vào tham số q với kỳ vọng $E\left(X_1\right) = 1 < +\infty$ và tồn tại $\lambda_q > 0$ phụ thuộc q để $E\left(e^{\lambda_q X_1}\right) = m\left(\lambda_q\right) < \infty$.*

Khi đó với mọi $f \in C_B^1\left(\mathbb{R}\right)$, đặt

$$\beta\left(\lambda_q\right) = \frac{2}{\lambda_q^2}\left[m\left(\lambda_q\right) - 1 - \lambda_q\right].$$

Nếu $\lim_{q \to 0^+} \omega\left(f'; q\right)\beta\left(\lambda_q\right) = 0$ thì

$$d_T\left(qS_N, Z; f\right) \leq \omega\left(f'; q\right)\left[4 + \beta\left(\lambda_q\right)\right].$$

Khi $f' \in Lip\left(\alpha, M\right)$ với $0 < \alpha \leq 1$ thì

$$d_T\left(qS_N, Z; f\right) \leq \left[4 + \beta\left(\lambda_q\right)\right] Mq^{\alpha}.$$

Trong đó $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ và $Z \sim \text{Exp}\left(1\right)$.

Chứng minh. Với x là giá trị thực dương ta luôn có bất đẳng thức đúng $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$, theo đó ta cũng có $e^{\lambda_q x} \geq 1 + \lambda_q x + \frac{\lambda_q^2 x^2}{2}$. Từ đó suy ra

$$x^2 \leq \frac{2}{\lambda_q^2}\left(e^{\lambda_q x} - \lambda_q x - 1\right).$$

Do đó ta có

$$E\left[\left(X_1\right)^2\right] \leq \frac{2}{\lambda_q^2}\left[m\left(\lambda_q\right) - 1 - \lambda_q\right] = \beta\left(\lambda_q\right).$$

Theo bổ đề 1, ta có thể phân tích biến ngẫu nhiên Z dạng $Z \stackrel{d}{=} qS_N^*$ với $S_N^* = \sum_{i=1}^{N} Z_i$, trong đó $\left\{Z_i, i \geq 1\right\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập với nhau, độc lập với N, cùng phân phối xác suất với $Z_1 \sim \exp\left(1\right)$. Từ sự phân tích này, với mọi $f \in C_B^1\left(\mathbb{R}\right)$ thì,

$$\begin{aligned} &d_T\left(qS_N, Z; f\right) = d_T\left(qS_N, qS_N^*; f\right) \\ &\leq E\left(N\right) d_T\left(qX_1, qZ_1; f\right) = \frac{1}{q}\left\|T_{qX_1} f - T_{qZ_1} f\right\| \end{aligned}$$

Áp dụng khai triển Taylor đến cấp 1 của hàm f ta có

$$\begin{aligned} &T_{qX_1} f\left(y\right) = \int_0^{+\infty} f\left(qx + y\right) dF_{X_1}\left(x\right) \\ &= f\left(y\right) + qf'\left(y\right) + q\int_0^{+\infty} x\left[f'\left(\eta\right) - f'\left(y\right)\right] dF_{X_1}\left(x\right), \end{aligned}$$

trong khai triển này thì $\left|\eta - y\right| < qx$. Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} &T_{qZ_1} f\left(y\right) \\ &= f\left(y\right) + qf'\left(y\right) + q\int_0^{+\infty} x\left[f'\left(\xi\right) - f'\left(y\right)\right] dF_{Z_1}\left(x\right), \end{aligned}$$

trong đó $\left|\xi - y\right| < qx$.

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} &\left|T_{qX_1} f\left(y\right) - T_{qZ_1} f\left(y\right)\right| = \\ &\left|q\int_0^{+\infty} x\left[f'\left(\eta\right) - f'\left(y\right)\right] dF_{X_1}\left(x\right) - q\int_0^{+\infty} x\left[f'\left(\xi\right) - f'\left(y\right)\right] dF_{Z_1}\left(x\right)\right|. \end{aligned}$$

Ta tiến hành đánh giá hiệu của hai toán tử liên kết

$$\begin{aligned} &\left|T_{qX_1} f\left(y\right) - T_{qZ_1} f\left(y\right)\right| \\ &\leq q\int_0^{+\infty} x\left|f'\left(\eta\right) - f'\left(y\right)\right| dF_{X_1}\left(x\right) \\ &\quad + q\int_0^{+\infty} x\left|f'\left(\xi\right) - f'\left(y\right)\right| dF_{Z_1}\left(x\right) \\ &\leq q\int_0^{+\infty} x\omega\left(f'; qx\right) dF_{X_1}\left(x\right) + q\int_0^{+\infty} x\omega\left(f'; qx\right) dF_{Z_1}\left(x\right) \\ &\leq q\omega\left(f'; q\right)\int_0^{+\infty} x\left(1 + x\right) dF_{X_1}\left(x\right) \\ &\quad + q\omega\left(f'; q\right)\int_0^{+\infty} x\left(1 + x\right) dF_{Z_1}\left(x\right) \\ &= q\omega\left(f'; q\right)\left[E\left(X_1\right) + E\left(X_1^2\right) + E\left(Z_1\right) + E\left(Z_1^2\right)\right]. \end{aligned}$$

Từ đó ta đánh giá hiệu hai toán tử ta có kết quả

$$\left|T_{qX_1} f\left(y\right) - T_{qZ_1} f\left(y\right)\right| \leq q\omega\left(f'; q\right)\left[4 + \beta\left(\lambda_q\right)\right]$$

Từ đó suy ra $d_T\left(qS_N, Z; f\right) \leq \omega\left(f'; q\right)\left[4 + \beta\left(\lambda_q\right)\right]$

Nếu $f' \in Lip\left(\alpha, M\right)$ *với* $0 < \alpha \leq 1$ *thì* $d_T\left(qS_N, Z; f\right) \leq \left[4 + \beta\left(\lambda_q\right)\right] Mq^{\alpha}$. □

IV. KẾT LUẬN

Các kết quả đạt được đã góp phần giải yêu cầu đặt ra về mặt lý thuyết của tổng hình học. Qua các kết quả cũng cho thấy việc sử dụng công cụ toán tử Trotter trong chứng minh và đánh giá tốc độ hội tụ của một số định lý giới hạn liên quan đến tổng hình học là phù hợp và rất hiệu quả.

Tài liệu tham khảo

[1] *Gnedenkov*, B. V., Korolev, V.Y. *Random sumation: Limit theorem and applications. Boca Raton: CRC Press.*

[2] Tran Loc Hung, *On a Probability Metric Based on Trotter Operator*, No. 35, *Vietnam* Journal of Mathematics, 2007, pp. 1-12.

[3] Tran *Loc* Hung, Tran Thien Thanh, Bui Quang Vu, *Some results related to distribution fuctions of chi-square type random variables with random degrees of freedom*, No. 3, Bull. Korean Math. Soc. 45, 2008, pp. 509-522.

[4] Tran *Loc* Hung, Tran Ngoc Hau, *On the accuracy of approximation of the distribution of negative-binomial random sums by the gamma distribution,* Kybernetika, Vol 54, No 5, pp 921-936, 2018.

[5] *Kalashnikov* V., *Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications*, Kuwer Academic Publishers, 1997.

[6] Trotter H.F., *An elementary proof of the central limit theorem*, No.10, Arch. *Math* Basel, 1959, pp. 226-234.